Références :
Analyse complexe, Eric Amar

Théo (des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe dans $\Omega\backslash S$ où S est un sous-ensemble de Ω sans point d'accumulation sur Ω. Soit $K \subset \Omega$ un compact à bord régulier et supposons ∂K ne contienne aucun point de S. Alors S n'a qu'un nombre fini de points dans K et on a*

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} Res(f, a)$$

Théo. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(\alpha) < 1$, on a*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Démonstration. Montrons la formule pour $0 < \alpha < 1$ et on aura le résultat par principe des zéros isolés.
Soit $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}e^{-s}ds\right) \\ &\underbrace{=}_{\text{Fubini-Tonelli}} \int\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} \frac{1}{t} e^{-(t+s)} dtds\end{aligned}$$

On effectue un changement de variables. Posons

$$\phi : (t, s) \mapsto (u, v) = \left(t + s, \frac{t}{s}\right)$$

On a donc $t = sv$ et

$$\begin{aligned} u = t + s \quad &\Leftrightarrow \quad u = sv + s \\ &\Leftrightarrow \quad s(1+v) = u \\ &\Leftrightarrow \quad s = \frac{u}{1+v}\end{aligned}$$

Ainsi, on a $t = \frac{uv}{1+v}$.

$$\phi^{-1} : (u, v) \mapsto (t, s) = \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)$$

On veut calculer le jacobien de ϕ^{-1}. Nous allons pour cela inverser le jacobien de ϕ. Commençons par calculer la jacobienne de ϕ.

$$\mathrm{Jac}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{s} & -\frac{t}{s^2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} J(\phi) &= -\frac{t}{s^2} - \frac{1}{s} \\ &= -\frac{t+s}{s^2} \\ &= -\frac{u}{\frac{u^2}{(1+v)^2}} \\ &= -\frac{(1+v)^2}{u}\end{aligned}$$

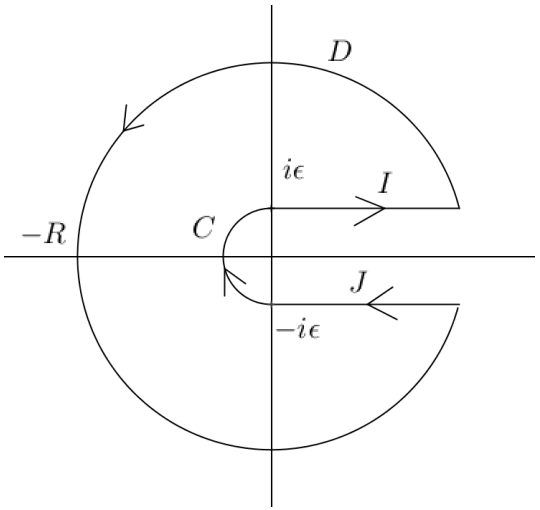
Par conséquent, on obtient que $J(\phi^{-1}) = -\frac{u}{(1+v)^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{v^{\alpha-1}e^{-u}}{1+v} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u}du\right)\left(\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)}\end{aligned}$$

On cherche maintenant à calculer cette intégrale. Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème des résidus.
Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash[0, +\infty[$ et soit la fonction définie sur $\Omega\backslash\{1\}$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^{1-\alpha}(1+z)},$$

en posant $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \mathrm{Arg}(z)}$ où $\mathrm{Arg}(z) \in]0, 2\pi[$.
On applique le théorème des résidus au lacet suivant,



$$\int_I f + \int_J f + \int_C f + \int_D f = 2i\pi \mathrm{Res}(f, -1).$$

On sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, -1) &= \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) \\
&= \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^{1-\alpha}} \\
&= (-1)^{\alpha - 1} \\
&= -e^{i\pi\alpha}
\end{aligned}$$

On calcule sur chacun des chemins.

- Sur C :

$$\begin{aligned}
\left| \int_C f \right| &= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varepsilon e^{it}) \varepsilon i e^{it} dt \right| \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^\alpha}{|1 + \varepsilon e^{it}|} dt \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon} dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

- Sur D, on pose $\theta_{\varepsilon,R} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}}\right)$

$$\begin{aligned}
\int_D f &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi - \theta_{\varepsilon,R}} \frac{1}{R^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)it} (1 + Re^{it})} iRe^{it} dt \\
&= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi - \theta_{\varepsilon,R}} \frac{iR^\alpha e^{i\alpha t}}{1 + Re^{it}} dt \\
&\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi} \frac{iR^\alpha e^{i\alpha t}}{1 + Re^{it}} dt \text{ par convergence dominée}
\end{aligned}$$

Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a $\left| \frac{iR^\alpha e^{i\alpha t}}{1 + Re^{it}} \right| \leq \frac{R^\alpha}{R-1}$. On obtient donc, comme $\alpha \leq 1$,

$$\int_D f \underset{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}}{\longrightarrow} 0$$

- Sur I.
Si $t \in]0, +\infty[$, alors $(t + i\varepsilon)^{1-\alpha} = |t + i\varepsilon|^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta_{\varepsilon,t}} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} t^{1-\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_0^{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}} f(i\varepsilon + t) dt \\
&= \int_0^{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}} \frac{dt}{(t + i\varepsilon)^{1-\alpha} (1 + t + i\varepsilon)}
\end{aligned}$$

Or, on sait que $|t + i\varepsilon| \geq |t|$ et $|1 + t + i\varepsilon| \geq |1 + t|$. On a donc

$$\mathbb{1}_{[0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]} \left| \frac{1}{(t + i\varepsilon)^{1-\alpha} (1 + t + i\varepsilon)} \right| \leq \mathbb{1}_{[0,R]} \frac{1}{|t|^{1-\alpha} |1 + t|}.$$

La fonction majorante est intégrable. Ainsi par théorème de convergence dominée

$$\int_I f \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^R \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

- Sur J.
  Si $t \in]0,+\infty]$, alors $(t-i\varepsilon)^{1-\alpha} = |t-i\varepsilon|^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)(2i\pi-\theta_{\varepsilon,t})}$.
  Ainsi, on a $(t-i\varepsilon)^{1-\alpha} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{-(1-\alpha)2i\pi} t^{1-\alpha} = e^{-2i\pi\alpha} t^{1-\alpha}$

$$\begin{aligned}\int_J f &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(t-i\varepsilon)dt \\ &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{dt}{(t-i\varepsilon)^{1-\alpha}(1+t-i\varepsilon)}\end{aligned}$$

  Or, on sait que $|t-i\varepsilon| \geq |t|$ et $|1+t-i\varepsilon| \geq |1+t|$. On a donc

$$\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]} \left| \frac{1}{(t-i\varepsilon)^{1-\alpha}(1+t-i\varepsilon)} \right| \leq \mathbb{1}_{[0,R]} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}|1+t|}.$$

  La fonction majorante est intégrable. Ainsi par théorème de convergence dominée

$$\int_J f \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^R \frac{dt}{e^{-2i\pi\alpha} t^{1-\alpha}(1+t)} = e^{2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

On obtient donc, par le théorème des résidus, en passant à la limite quand $R \to +\infty$,

$$(1-e^{2i\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} = -2i\pi e^{i\pi\alpha}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)} &= \frac{2i\pi e^{i\pi\alpha}}{e^{2i\pi\alpha}-1} \\ &= \frac{2i\pi e^{i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\end{aligned}$$

□

Leçons possibles : 235 - 236 - 239 - 245